ahaghbin@gmail.com
www.dr-haghbin.info

به نام زندگی

درس: معادلات دیفرانسیل

۱- معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

منظور از یک معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است شامل x، y و مشتقات y نسبت به x که به صورت کلی زیر قابل بیان است

$$f(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

* مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل

منظور از مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل، بزرگترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله دیفرانسیل است.

مثال: مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل $y' - y = 0$ برابر یک است

$(y'')^3 + y' + y = 0 \longrightarrow$ مرتبه‌ی دوم

$$y^{(4)} + y'' + y' - 2x = 0$$ مرتبه‌ی چهارم

* جواب یک معادله دیفرانسیل

منظور از جواب یک معادله‌ی دیفرانسیل، تابعی مانند $y = f(x)$

یا $f(x, y) = 0$ است که در معادله صدق می‌کند

مثال: در معادله‌ی دیفرانسیل $y' = y$ تابع $y = e^x$ یک جواب معادله است.

یا در حالت کلی‌تر تابع $y = ce^x$ یک جواب معادله است

مثال: در معادله‌ی دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 0$ تابع $y = e^x$ جواب معادله است. همچنین $y = e^{2x}$ نیز جواب معادله است.

در حالت کلی $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ جواب معادله است.

* هر معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n ام دارای یک جواب کلی (عمومی) با n ضریب ثابت است.

* برای به دست آوردن ضرایب ثابت c_1 ، c_2 ، … ، c_n لازم است n شرط اولیه در مورد تابع $f(x,y)=0$ به ما داده شود.

مثال: معادله دیفرانسیل $y'=y$ را در نظر بگیریم. این معادله دارای جواب کلی $y=ce^{x}$ است.

اگر در معادله دیفرانسیل $y' = y$ داشته باشیم $\underbrace{y(0) = 1}_{\text{شرط اولیه}}$

آنگاه جواب معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = ce^{x} \xrightarrow[y=1]{x=0} 1 = ce^{0} \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = e^{x}$$

* تعریف معادله دیفرانسیل خطی

اگر معادله ی دیفرانسیل $f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ را بتوانیم به

فرم زیر بازنویسی کنیم، معادله ی دیفرانسیل را خطی می گوییم.

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = g(x)$$

در غیر این صورت معادله ی دیفرانسیل را غیرخطی می گوییم.

مثال: خطی

$$2xy + x^2 y' - \frac{1}{x} = 0$$

غیرخطی

$$2x(y')^2 + x\sqrt{y} + \ln x = 0$$

قضیه‌ی وجود جواب (برای معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول)

در معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به فرم $y' = f(x,y)$ اگر تابع $f(x,y)$ و تابع $\frac{\partial f}{\partial y}$ در ناحیه‌ای شامل (x_0, y_0) پیوسته باشند

آنگاه، معادله دیفرانسیل دارای یک جواب منحصر به فرد در این ناحیه است به طوری که $y(x_0) = y_0$

* فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به صورت $f(x, y, y') = 0$

یا $y' = f(x, y)$ یا $M\,dx + N\,dy = 0$

که در آن M ، N توابعی از x و y هستند، قابل بیان است.

برای حل یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول می توانیم حالت های زیر را در نظر بگیریم:

۱- اگر در معادله ی $y' = f(x,y)$ اگر $f(x,y)$ مستقل از y باشد یا به عبارت دیگر $f(x,y)$ فقط تابعی از x باشد، معادله دیفرانسیل به فرم زیر قابل بازنویسی و حل است.

$$y' = f(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\Longrightarrow dy = f(x)\,dx$$

از طرفین انتگرال

$$\Longrightarrow \int dy = \int f(x)\,dx \Longrightarrow y = \int f(x)\,dx + c$$

می‌گیریم

2- اگر معادله‌ی $y' = f(x,y)$ تابع $f(x,y)$ مستقل از x باشد یا به عبارت دیگر صرفاً تابعیت از y داشته باشد، معادله‌ی دیفرانسیل به صورت زیر قابل بازنویسی و حل است.

$$y' = f(x,y) \equiv h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = dx$$

از طرفین معادله $\Longrightarrow$ انتگرال می‌گیریم

$$\int dx = \int \frac{dy}{h(y)} \Longrightarrow x = \int \frac{dy}{h(y)} + c$$

3 - اگر در معادله‌ی $y' = f(x,y)$ تابع $f(x,y)$ یک تابع تفکیک پذیر به صورت تابعی از x ضرب در تابعی از y باشد، معادله دیفرانسیل به صورت زیر قابل بازنویسی و حل است.

$$y' = f(x, y) = g(x)\,h(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \Longrightarrow$$

از طرفین انتگرال

می‌گیریم

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + C$$

مثال : معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' = \underbrace{1 + x^2 + x^2 y + y}_{f(x,y)} = (1+x^2) + (1+x^2)y$$

$$\Longrightarrow y' = (1+x^2)(1+y)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y) \Longrightarrow \frac{dy}{1+y} = (1+x^2)dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|1+y| = x + \frac{x^3}{3} + C$$

۴- ممکن است معادله‌ی دیفرانسیل کامل باشد.

یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول به فرم $Mdx + Ndy = 0$

را کامل می‌گوییم اگر تابعی مانند $\varphi(x,y)$ وجود داشته باشد،

به طوری که داشته باشیم

$$d\varphi = Mdx + Ndy$$

در این صورت معادله‌ی دیفرانسیل $M\,dx + N\,dy = 0$

معادل، معادله‌ی دیفرانسیل $d\varphi = 0$ خواهد بود و جواب

معادله عبارت است از $\varphi(x, y) = C$

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y\,dx + x\,dy = 0$ یک معادله‌ی

دیفرانسیل کامل است.

یادآوری:

$$y = f(x) \longrightarrow dy = f'(x)\,dx$$

$$f(x,y) \longrightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

$$d\overbrace{(xy)}^{f(x,y)} = y\,dx + x\,dy$$

$$y\,dx + x\,dy = 0 \Longrightarrow d(xy) = 0 \Longrightarrow xy = c$$

تذکر : معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول $M\,dx + N\,dy = 0$ یک معادله دیفرانسیل کامل است اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\,dx + N\,dy = d\varphi \quad , \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = d\varphi \qquad N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال: آیا معادله‌ی دیفرانسیل زیر کامل است یا خیر؟

$$\underbrace{(2xy + \sin y)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2 + x\cos y)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + \cos y$$

$$\Longrightarrow$$ معادله کامل است.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + \cos y$$

* روش حل معادله‌ی دیفرانسیل کامل

اگر معادله‌ی دیفرانسیل $M dx + N dy = 0$ کامل باشد، داریم

$$\exists \varphi \ ; \quad M dx + N dy = d\varphi$$

از طرف دیگر می‌دانیم

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = M & (\mathrm{I}) \\ , \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

برای حل معادله ی دیفرانسیل از رابطه (I) شروع می کنیم.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \xrightarrow[\text{نسبت به } x \text{ انتگرال می گیریم}]{\text{از همین رابطه}} \varphi = \int M\,dx + h(y)$$

از طرف دیگر طبق رابطه (II) داریم

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \quad , \quad \varphi = \int M\,dx + h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx + h'(y) = N$$

$$\Rightarrow h'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\,dx \right) dy + C$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \int M\,dx + h(y)$$

$\Rightarrow$ جواب معادله $\quad \varphi = C'$

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل کامل، می‌توان راه حل را از رابطه‌ی III نیز شروع کرد.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \xRightarrow[\text{نسبت به } y \text{ انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین عبارت}} \varphi = \int N\,dy + g(x)$$

از طرف دیگر

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \;,\quad \varphi = \int N\,dy + g(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int N\,dy + g'(x) = M$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = M - \frac{\partial}{\partial x}\int N\,dy$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \int \left(M - \frac{\partial}{\partial x}\int N\,dy \right) dx + C$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = \int N \, dy + g(x)$$

$\Longrightarrow$ جواب معادله : $\varphi = C'$